ADMISSION AU COLLEGE UNIVERSITAIRE
Samedi 2 mars 2013
MATHEMATIQUES
durée de l'épreuve : 3h – coefficient 2

Le sujet est numéroté de 1 à 3.

L'exercice Vrai-Faux est noté sur 8, le problème est noté sur 12.

Les calculatrices sont autorisées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\frac{4}{5}$, et on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ pour tout entier naturel non nul n. La suite (S_n) converge vers 5.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est géométrique.

3) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $v_n = \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est convergente.

4) Une entreprise de sondage réalise une enquête par téléphone. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à 0,2.
Si un enquêteur contacte 50 personnes, la probabilité qu'au moins six personnes acceptent de lui répondre est supérieure à 0,95.

5) Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.

6) L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.

7) On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.

8) L'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2$ a exactement trois solutions réelles.

9) Voici un algorithme :

```
Entrée
Saisir un entier naturel a
Traitement
Affecter à n la valeur 1 et à c la valeur 1
Tant que c ≤ a
    Affecter à n la valeur n+1
    Affecter à c la valeur c+n²
Fin du Tant que
Sortie
Afficher la valeur de n
```

Si on saisit pour a la valeur 20, alors la sortie vaut 4.

10) On lance deux dés cubiques et non truqués. On appelle X la variable aléatoire donnant le plus grand des deux chiffres obtenus. L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = \frac{161}{36}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

1) Etudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que les limites en 0 et en + ∞.

2) Montrer que l'axe des ordonnées du repère et la courbe (Γ) d'équation $y = \ln(\frac{\mathrm{e}}{2}x)$ sont asymptotes à la courbe (C).

On rappelle que les courbes (C_1) et (C_2) respectivement représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 sont asymptotes en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_1(x) - f_2(x)\right) = 0$.

3) **a)** Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) < 1$.

b) Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite d d'équation $y = x$.

4) Tracer la droite d ainsi que les courbes (Γ) et (C) sur le même graphique.

Partie B

On se donne un réel u_0 supérieur ou égal à 1. La suite (u_n) est définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

On admet que la limite de la suite (u_n) est égale à 1.

On se propose dans cette partie d'étudier la rapidité de convergence de la suite (u_n) vers sa limite.

1) Que peut-on dire de la suite (u_n) quand u_0 vaut 1 ?

2) Dans cette question on choisit la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies à 10^{-6} près de u_1, u_2 et u_3.

On suppose dans la suite de cette partie que le réel u_0 est strictement supérieur à 1.

3) **a)** Montrer que, pour tout réel t strictement supérieur à -1, on a :

$$\ln(1+t) \leq t.$$

b) Montrer que, pour tout réel h positif ou nul, on a :

$$f(1+h)-1 = \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right).$$

c) Montrer que, pour tout réel h positif ou nul, on a :

$$0 \leq f(1+h)-1 \leq \frac{h^2}{2}.$$

4) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} \leq \dfrac{v_n{}^2}{2}$.

5) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq v_n \leq 2\left(\dfrac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

6) Dans cette question, on choisit à nouveau la valeur $\dfrac{3}{2}$ pour u_0.

A partir de quel rang p peut-on affirmer que $u_p - 1 \leq 10^{-20}$?

****